|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Zentralabitur 2024** | **Mathematik** | **Material für Prüflinge** |
| **Prüfungsteil B – Rechnertyp: GTR** | **Analysis eA** | **Gymnasium Gesamtschule** |

**Name:** \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**Klasse:** \_\_\_\_\_\_\_\_

# Aufgabe 1A (40 BE)

Gegeben ist die Schar der in definierten Funktionen mit  
 und

a) Skizzieren Sie den Graphen von in Abbildung 1.  
Geben Sie die Extrempunkte von an. **[5 BE]**

#### Abbildung 1

y

5

4

3

2

1

-1

-2

x

-2 -1 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

b) Ermitteln Sie die Koordinaten der gemeinsamen Punkte der Graphen von und .

Die Graphen von und haben die gemeinsamen Punkte und mit und .

Weisen Sie nach, dass es nur einen Punkt gibt, der auf allen Graphen der Schar liegt. **[5 BE]**

c) Die Gleichung hat in Abhängigkeit von die Lösungen und 0 und .

Geben Sie die Anzahl der Nullstellen von in Abhängigkeit von an und begründen Sie Ihre Angabe anhand der obigen Terme. **[6 BE]**

d) Der Graph jeder Funktion hat genau einen Wendepunkt .

Bestimmen Sie den Wert von zu dem Wendepunkt mit der größten y-Koordinate. **[5 BE]**

Für ein Umweltschutzprojekt nehmen zwei Unterwasserdrohnen U1 und U2 in einem See Messungen in unterschiedlichen Tiefen vor. Sie bewegen sich nur in vertikaler Richtung, d. h. senkrecht zur Wasseroberfläche des Sees. Ihre Geschwindigkeiten werden für durch die in definierten Funktionen v bzw. w beschrieben, wobei gilt:

und

Dabei ist die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Minuten. ist die Geschwindigkeit von U1 in Meter pro Minute und ist die Geschwindigkeit von U2 in Meter pro Minute. Wenn die Geschwindigkeit positiv ist, steigt die Unterwasserdrohne.

e) Bestimmen Sie die Koordinaten des Tiefpunktes des Graphen von und interpretieren Sie die Werte im Sachkontext. **[4 BE]**

f) Mit wird die erste Ableitungsfunktion von bezeichnet. Innerhalb eines bestimmten Zeitraums gilt für jeden Zeitpunkt t die folgende Aussage:   
 und .

Interpretieren Sie dies in Bezug auf die Bewegung von U1 in diesem Zeitraum. **[3 BE]**

g) Im Beobachtungszeitraum beträgt der geringste Abstand von U1 zur Wasseroberfläche des Sees   
10 Meter.

Ermitteln Sie den Abstand von U1 zur Wasseroberfläche zu Beobachtungsbeginn. **[6 BE]**

h) U2 ist zu Beobachtungsbeginn 5 Meter tiefer als U1 und steigt langsamer als U1. Der Graph in Abbildung 2 zeigt für die ersten Minuten des Beobachtungszeitraums die zeitliche Entwicklung des vertikalen Abstands der beiden Unterwasserdrohnen zueinander. Im dargestellten Bereich hat der Graph nur einen Hochpunkt .

Erläutern Sie, wie man anhand der Graphen von und ermitteln kann, und geben Sie einen Term zur Berechnung von an. **[6 BE]**

#### Abbildung 2

y

t

**H**

# Aufgabe 1B (40 BE)

Die zeitliche Entwicklung der Blutalkoholkonzentration (BAK) kann für eine bestimmte Person nach dem Verzehr von zwei Gläsern Wein durch die auf definierte Funktion mit  
 beschrieben werden. Dabei gibt die Zeit nach dem Trinken in Stunden an und die BAK in Gramm pro Kilogramm . Es soll vereinfacht davon ausgegangen werden, dass die gesamte Menge Wein auf einmal konsumiert wird.

a) Geben Sie die Nullstellen von an.

Begründen Sie, dass das Intervall [0;7,2]  
eine angemessene Einschränkung des Definitionsbereichs der Funktion für den Sachzusammenhang ist. **[3 BE]**

b) Berechnen Sie die maximale BAK der betrachteten Person.

Bei einer BAK von 0,5 oder mehr darf die Person in Deutschland kein Auto mehr fahren.

Bestimmen Sie den Zeitraum, in dem die Person nicht Auto fahren darf. **[6 BE]**

Mit Hilfe einer linearen Funktion können Näherungswerte für die BAK berechnet werden. Für jede Person ergibt sich je nach individuellen Eigenschaften und konsumierter Alkoholmenge eine andere lineare Funktion. Der y-Achsenabschnitt des Graphen der linearen Funktion wird als theoretische maximale BAK bezeichnet.

Für die betrachtete Person wird die auf definierte Funktion mit  
 verwendet. Dabei beschreibt die Zeit nach dem Trinken in Stunden und Näherungswerte der BAK in .

c) Zeigen Sie, dass die theoretische maximale BAK für die betrachtete Person beträgt.

Zur Bestimmung der linearen Funktion für eine zweite Person werden zwei Messungen durchgeführt: 4 Stunden nach dem Verzehr beträgt die BAK und weitere 30 Minuten später .

Berechnen Sie damit die theoretische maximale BAK der zweiten Person. **[5 BE]**

d) Begründen Sie mit Hilfe des Terms von , dass die Werte der BAK der ersten betrachteten Person zu jedem Zeitpunkt kleiner sind als ihre theoretische maximale BAK. **[3 BE]**

Im Folgenden wird wieder die zeitliche Entwicklung der BAK anhand der Funktion betrachtet. Gegeben ist die Differenzialgleichung:

e) Zeigen Sie, dass eine Lösung der Differenzialgleichung mit und  
 ist. **[6 BE]**

f) Die zeitliche Entwicklung der BAK setzt sich aus verschiedenen Wachstumsprozessen zusammen.

Begründen Sie anhand der Differenzialgleichung, dass die zeitliche Entwicklung der BAK auf lange Sicht näherungsweise einen linearen Abnahmeprozess darstellt. **[5 BE]**

Unabhängig vom Sachkontext wird für die auf definierte Funktionenschar betrachtet mit  
.  
Es gilt:

g) Zeigen Sie, dass jede Funktion der Schar ein lokales Maximum an der Stelle hat.

Begründen Sie, dass die x-Koordinaten der Hochpunkte mit wachsenden Werten von kleiner werden. **[7 BE]**

h) Der Inhalt der Fläche zwischen den Graphen von und auf dem Intervall [0;1] soll an der Stelle durch eine Parallele zur y-Achse halbiert werden. Bestimmen Sie . **[5 BE]**

#### Gesamtergebnis

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Aufgabe** | **Mögliche Punkte** | **Erreichte Punkte** |
| **1A** | **40 BE** |  |
| **a)** | **5 BE** |  |
| **b)** | **5 BE** |  |
| **c)** | **6 BE** |  |
| **d)** | **5 BE** |  |
| **e)** | **4 BE** |  |
| **f)** | **3 BE** |  |
| **g)** | **6 BE** |  |
| **h)** | **6 BE** |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **1B** | **40 BE** |  |
| **a)** | **3 BE** |  |
| **b)** | **6 BE** |  |
| **c)** | **5 BE** |  |
| **d)** | **3 BE** |  |
| **e)** | **6 BE** |  |
| **f)** | **5 BE** |  |
| **g)** | **7 BE** |  |
| **h)** | **5 BE** |  |